10.2.5 Derivace součinu a podílu

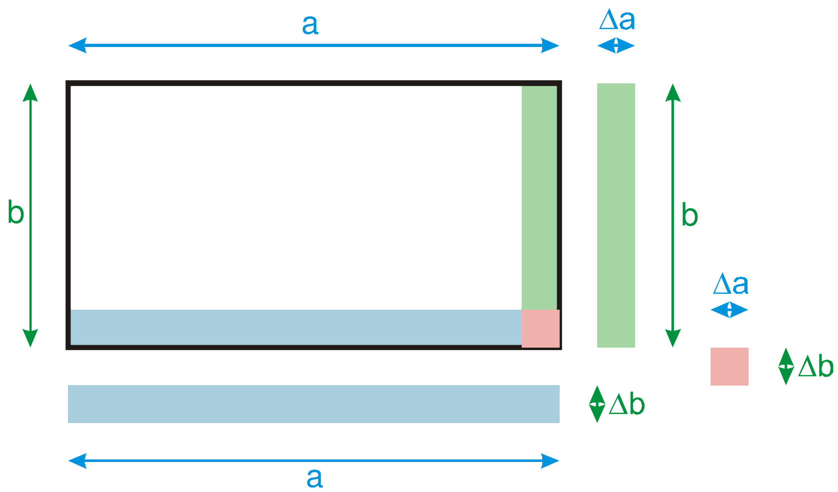
Předpoklady: 10204

Pedagogická poznámka: Následující odvození jsem převzal a amerického fyzikálního kursu Mechanical Universe. Možná není dostatečně „rigorózní“, ale mě osobně se strašně líbí spojitost mezi ořezáváním prkénka a chováním nekonečně malých veličin. Stejně tak vždy zdůrazňuji, jak je fantastické, že se vzorec pro násobení má v sobě schované správné postupy na derivování mocnin.

Z minulé hodiny víme, že pro derivování součinu neplatí „přirozený vzorec“ $(uv)' = u' \cdot v'$. Jak nalézt správný vzorec?

Derivace je limitou z poměru $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$) $\Rightarrow$ najdeme příklad veličiny, která je rovna součinu dvou jiných veličina prozkoumáme její změnu.

Obsah plochy: $S = ab$. Jak se změní obsah plochy v čase (při ořezávání nebo obrušování)?



Z obrázku je vidět, že platí:
$\Delta S = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a - \Delta a \Delta b$ (červený čtvereček je započítán dvakrát)

Změna probíhá v čase $\Rightarrow$ vydělíme Δt: $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{a \cdot \Delta b}{\Delta t} + \frac{b \cdot \Delta a}{\Delta t} - \frac{\Delta a \Delta b}{\Delta t}$

Použijeme: $S = ab$: $\frac{\Delta(ab)}{\Delta t} = a\frac{\Delta b}{\Delta t} + b\frac{\Delta a}{\Delta t} - \frac{\Delta a \Delta b}{\Delta t}$

Se zmenšující velikostí Δa a Δb se červený čtvereček vůči obdélníkům čím dál menší (zmenšují se obě jeho strany) $\Rightarrow$ pro malé Δt platí: $\frac{\Delta(ab)}{\Delta t} = a\frac{\Delta b}{\Delta t} + b\frac{\Delta a}{\Delta t}$

pro nekonečně malé dt: $\frac{d(ab)}{dt} = a\frac{db}{dt} + b\frac{da}{dt} \Rightarrow (ab)' = ab' + ba'$

Věta o derivaci součinu:
Nechť jsou dány funkce u, v. Jestliže funkce u, v mají v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i funkce $u \cdot v$ platí: $(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$

Zkrácený zápis: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Pedagogická poznámka: Ve svých třídách opravdu použití vzorců z této hodiny na tabuli neukazuji. Je to zbytečně víc než čtyři, pět lidí chybu neudělá.

Př. 1: Urči derivaci $\left(x^2 \sin x\right)'$.

$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Je vidět, že derivováním se mohou funkce i komplikovat.

Př. 2: Ověř platnost vzorce pro derivaci součinu derivováním funkce $y = x^6$.

Derivace podle pravidla pro mocninou funkci: $\left(x^6\right)' = 6x^5$.

Funkci $y = x^6$ můžeme na součin rozdělit různými způsoby:

$\left(x^6\right)' = \left(x \cdot x^5\right)' = (x)' x^5 + x\left(x^5\right)' = 1 \cdot x^5 + x \cdot 5x^4 = x^5 + 5x^5 = 6x^5$

$\left(x^6\right)' = \left(x^2 \cdot x^4\right)' = \left(x^2\right)' x^4 + x^2\left(x^4\right)' = 2x \cdot x^4 + x^2 \cdot 4x^3 = 2x^5 + 4x^5 = 6x^5$

$\left(x^6\right)' = \left(x^3 \cdot x^3\right)' = \left(x^3\right)' x^3 + x^3\left(x^3\right)' = 3x^2 \cdot x^3 + x^3 \cdot 3x^2 = 3x^5 + 3x^5 = 6x^5$

Zvolili jsme tři různé způsoby, přesto jsme pokaždé dostali správný výsledek.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad rozdělujeme a každé oddělení počítá jednu z variant.

Př. 3: Urči derivaci $(\sin x \cdot \cos x)'$.

$(\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Ještě horší vzorec musíme používat na derivování podílu:

Věta o derivaci podílu:
Nechť jsou dány funkce *u*, *v*. Jestliže funkce *u*, *v* mají v bodě x_0 derivaci a $v(x_0) \neq 0$, má v bodě x_0 derivaci i funkce $\frac{u}{v}$ platí:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Zkrácený zápis: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Př. 4: Urči derivaci $\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)'$

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x^2 - \sin x \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x\left(x \cdot \cos x - 2\sin x\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{x \cdot \cos x - 2\sin x}{x^3}$$

Př. 5: Ověř platnost vzorce pro derivaci podílu derivováním funkce $y = x^3$.

Derivace podle pravidla pro mocninou funkci: $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

Funkci $y = x^3$ můžeme na podíl rozdělit různými způsoby:

$$\left(x^3\right)' = \left(\frac{x^4}{x}\right)' = \frac{\left(x^4\right)' \cdot x - x^4 (x)'}{x^2} = \frac{4x^3 \cdot x - x^4 \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$$

$$\left(x^3\right)' = \left(\frac{x^5}{x^2}\right)' = \frac{\left(x^5\right)' \cdot x^2 - x^5 \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{5x^4 \cdot x^2 - x^5 \cdot 2x}{x^4} = \frac{5x^6 - 2x^6}{x^4} = \frac{3x^6}{x^4} = 3x^2$$

$$\left(x^3\right)' = \left(\frac{x^6}{x^3}\right)' = \frac{\left(x^6\right)' \cdot x^3 - x^6 \left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{6x^5 \cdot x^3 - x^6 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x^8 - 3x^8}{x^6} = \frac{3x^8}{x^6} = 3x^2$$

Zvolili jsme tři různé způsoby, přesto jsme pokaždé dostali správný výsledek.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad rozdělujeme a každé oddělení počítá jednu z variant.

Pomocí vzorce pro podíl můžeme odvodit i vzorce pro derivaci dalších goniometrických funkcí:

Př. 6: Urči derivace funkcí: a) $y = \operatorname{tg} x$ b) $y = \operatorname{cotg} x$

a) $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

b) $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

V obou případech musíme dát pozor na taková x z definičního oboru, pro která nejsou původní funkce definované $\Rightarrow$

- **Pro funkci** $y = \operatorname{tg} x$**,** $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in Z$**, platí** $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$**.**
- **Pro funkci** $y = \operatorname{cotg} x$**,** $x \neq k\pi, k \in Z$**, platí** $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$**.**

Pomocí vzorce pro derivaci podílu můžeme odvodit i derivaci mocninných funkcí se záporným mocnitelem:

Př. 7: Urči derivaci $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Stejný výsledek bychom dostali i pomocí vzorce pro derivování mocninné funkce:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

$\Rightarrow$ vzorec pro derivaci mocninné funkci platí nejen pro přirozený, ale i pro celý a dokonce i pro reálný exponent:

- **Pro funkci** $y = x^n$**,** $x \in R - \{0\}, n \in Z^-$**, platí** $y' = n\,x^{n-1}$
- **Pro funkci** $y = x^n$**,** $x \in R^+, n \in R$**, platí** $y' = n\,x^{n-1}$

Př. 8: Urči derivace:

a) $\left(\frac{1}{x^3}\right)'$ b) $\left(\sqrt{x}\right)'$ c) $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'$ d) $\left(x^2\sqrt{x}\right)'$ e) $\left(\frac{x^2 + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)'$

Předpisy funkcí uprav v případě potřeby tak, aby si nemusel používat vzorec pro derivaci součinu nebo podílu.

a) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

b) $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

d) $\left(x^2\sqrt{x}\right)' = \left(x^2x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$

e) $\left(\frac{x^2+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{x^2+x+x^{\frac{1}{2}}}{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(\frac{x^2+x+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = \left(x^{2-\frac{3}{2}}+x^{1-\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\right)' =$

$= \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} - 1\cdot x^{-1-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2}$

Rada do budoucna: Vždy se snažíme o takové úpravy předpisu funkce, abychom při derivování nemuseli používat vzorec pro derivaci součinu nebo podílu.

Př. 9: (BONUS) Dokaž platnost vzorce pro derivování mocninných funkcí se záporným mocnitelem.

$\left(x^n\right)'$ $n<0$ položíme $m=-n \Rightarrow m>0$

$\left(x^n\right)' = \left(x^{-m}\right)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'x^m - 1\cdot\left(x^m\right)'}{\left(x^m\right)^2} = \frac{0\cdot x^m - 1\cdot m\cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m\cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} =$

$= -mx^{-1-m} = nx^{-1+n} = nx^{n-1}$

Př. 10: Petáková:

strana 155/cvičení 19 f_3, f_4

strana 155/cvičení 20 g_2, g_4

strana 156/cvičení 21 h_2, h_3, h_5

Shrnutí: Vzorce pro derivaci součinu a podílu jsou složité, proto se jim snažíme vyhnout.